

Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre.
– Pierre-Simon Laplace

Table des matières

1	La cinématique, ou comment décrire le mouvement	2
1.1	Coordonnées cartésiennes	2
1.2	Coordonnées polaires et cylindriques	5
1.3	Coordonnées sphériques	7
1.4	Quelques mouvements particuliers	8
2	Les lois de la dynamique	9
2.1	Le point matériel	10
2.2	Référentiels	11
2.3	Quantité de mouvement	12
2.4	1 ^{ère} loi de Newton : principe d'inertie	13
2.5	2 ^{ème} loi de Newton : principe fondamental de la dynamique	14
2.6	3 ^{ème} loi de Newton : principe des actions réciproques	15
2.7	Quelques forces courantes	15
2.7.1	Interaction gravitationnelle	15
2.7.2	Champ de pesanteur et poids	15
2.7.3	Frottements fluides	18
2.7.4	Réaction d'un support et lois de Coulomb	20
2.7.5	Tension d'un fil	22
2.7.6	Loi de Hooke	23
2.7.7	Interaction Coulombienne	24
2.7.8	Force de Lorentz	24
3	Considérations énergétiques	26
3.1	Puissance d'une force	26
3.1.1	Caractère moteur ou résistant d'une force	26
3.2	Travail d'une force	26
3.2.1	Vecteur déplacement élémentaire	26
3.3	Conservation de l'énergie	28
4	De la mécanique du point à la mécanique du solide	31
4.1	Centre de masse et point d'application	32
4.2	Le moment cinétique	34
4.3	Moment d'une force	35
4.4	Le théorème du moment cinétique	36

Introduction

La mécanique est le domaine de la physique dont l'objet d'étude est le mouvement et la déformation des systèmes physiques. On entend par système physique n'importe quelle partie de l'univers que l'on choisit d'analyser, de l'atome jusqu'à la galaxie, en passant par des objets qu'il est plus facile d'appréhender à notre échelle, comme une balle de tennis... Cette diversité de systèmes d'étude donne naissance à différentes sous-branches de la mécanique. Etudier le mouvement des molécules d'eau dans un tuyau relève de la mécanique des fluides, tandis que décrire la trajectoire d'une comète relève de la mécanique céleste. Ces sujets ont une racine commune, la mécanique Newtonienne, ou mécanique classique, dont il est question ici.

L'objectif de ce cours est double : on cherche à *décrire* le mouvement des systèmes physiques - c'est la vocation de la **cinématique** - et *prédire* ce mouvement en connaissant ses causes - c'est la vocation de la **dynamique**. Finalement, pour comprendre le dialogue entre la mécanique et la thermodynamique, l'électromagnétisme ou autre pièce essentielle de la physique, il est de mise d'interpréter les lois de la dynamiques du point de vue des échanges d'**énergie** entre les systèmes.

1 La cinématique, ou comment décrire le mouvement

Pour étudier un système physique en déplacement, il est nécessaire de choisir un **repère**, c'est-à-dire un **système de coordonnées** permettant de situer le système dans l'espace. Il existe plusieurs systèmes de coordonnées différents, et il est primordial de savoir choisir lequel utiliser. Un choix de repère judicieux permet de résoudre un problème en quelques lignes, là où un autre repère mène à des calculs beaucoup plus fastidieux (voire douloureux).

Comment faire le bon choix et économiser de la craie ? On choisit un système de coordonnées en s'appuyant sur les **symétries** du problème. Il est nécessaire de savoir utiliser les différents systèmes de coordonnées, et de connaître les expressions correspondantes de la **position**, de la **vitesse**, et de l'**accélération**. Il est également important de savoir jongler en passant d'un système de coordonnées à un autre.

1.1 Coordonnées cartésiennes

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct ($Oxyz$).

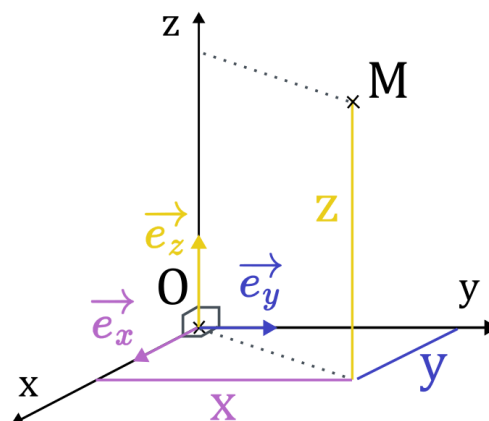


Figure 1 – Système de coordonnées cartésiennes

Dans ce système de coordonnées, la position d'un point matériel M est repérée par :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Définition 1 : Vecteur position

\overrightarrow{OM} est appelé **vecteur position**. Ses composantes $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sont des fonctions dépendantes du temps.

Définition 2 : equation*s horaires

On appelle **équations horaires** les équations qui décrivent l'évolution temporelle du vecteur position

Exemple : Une particule initialement en O se déplace à vitesse constante v dans le plan (Oxy) incliné d'un angle α par rapport à l'axe des x .

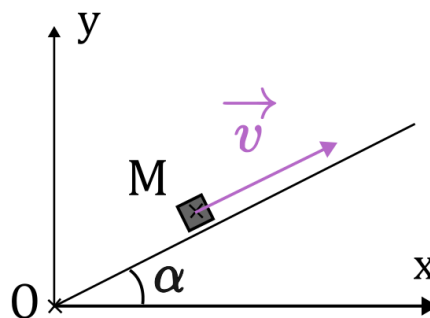


Figure 2 – Palet glissant sur un plan incliné

Les équations horaires sont :

$$\begin{cases} x(t) = v \cos(\alpha) t \\ y(t) = v \sin(\alpha) t \end{cases}$$

Définition 3 : Trajectoire

La **trajectoire** du point M est l'ensemble des positions prises par M au cours du mouvement.

La trajectoire est donc décrite par une ou plusieurs équation qui ne font pas apparaître explicitement le temps t .

Exemple : en reprenant l'exemple du plan incliné, la trajectoire est donnée par l'équation :

$$y = \tan(\alpha) x$$

qui n'est autre que l'équation d'une droite de coefficient directeur $\tan(\alpha)$ passant par l'origine.

On cherche maintenant à définir la notion de vitesse. Prenons un coureur qui se déplace sur une ligne droite, et qui réalise un 100 mètres en 10 secondes. On définit sa vitesse moyenne sur toute la course comme la distance parcourue divisée par la durée de la course (10 mètres

par secondes ici). Comme son nom l'indique, cette vitesse est une moyenne, elle est donc insuffisante pour attester du fait que le coureur peut accélérer pendant la course. On pallie ce problème en prenant un intervalle de temps de plus en plus court pour évaluer la distance parcourue.

On définit alors naturellement le vecteur vitesse d'un comme le *taux de variation temporel* de la position.

Définition 4 : Vecteur vitesse

On appelle **vecteur vitesse instantanée** (ou simplement **vecteur vitesse**) la dérivée temporelle de la position :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

Ici, les vecteurs \vec{e}_i sont fixes, ils ne dépendent pas du temps. On obtient alors simplement :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}(t) \vec{e}_x + \frac{dy}{dt}(t) \vec{e}_y + \frac{dz}{dt}(t) \vec{e}_z$$

Propriété 1 :

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.

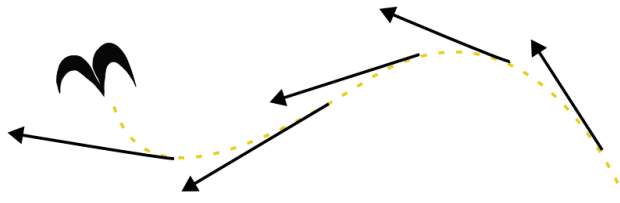


Figure 3 – Vecteur vitesse d'un oiseau dans un virage

Remarque : On utilisera par la suite la notation $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$, $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$,... Il faut d'autre part insister sur le fait que le terme "vitesse" est ambigu. En effet, il ne faut pas confondre le vecteur vitesse (qui possède en général trois composantes) et la norme du vecteur vitesse.

De même, l'accélération est définie comme le taux de variation temporel de la vitesse.

Définition 5 : Vecteur accélération

On appelle **vecteur accélération** la dérivée temporelle de la vitesse :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$$

1.2 Coordonnées polaires et cylindriques

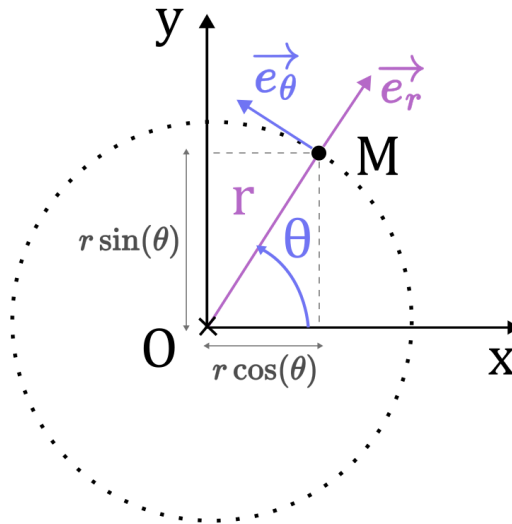


Figure 4 – Système de coordonnées polaires

Nous allons maintenant traiter des coordonnées adaptées aux systèmes qui présentent un axe privilégié de rotation, par exemple une mouche qui se déplace selon un cercle. Notre mouche est ici un point M se déplaçant dans le plan (Oxy) . On peut repérer sa position de deux manières différentes :

- Avec les coordonnées (x, y) appelées coordonnées **cartésiennes**.
On note que $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
- Avec les coordonnées (r, θ) , c'est-à-dire la distance à l'origine et l'angle que fait \overrightarrow{OM} avec l'axe des x , appelées coordonnées **polaires**.
On note que $r \in [0, +\infty[$ et $\theta \in [0, 2\pi[$

On peut facilement exprimer ces coordonnées les unes en fonction des autres :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Remarque : Ce système de coordonnées est particulièrement adapté à l'étude de mouvements circulaires, où la distance à l'origine r reste constante.

On définit la **base polaire mobile** $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ attachée au point M .

- \vec{e}_r est appelé vecteur **radial**, toujours dirigé selon le vecteur \overrightarrow{OM}
- \vec{e}_θ est appelé vecteur **orthoradial**, toujours perpendiculaire à \vec{e}_r dans le sens direct

Dans ce système de coordonnées le vecteur position s'écrit simplement :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

Remarque : Ici, il faut noter que les vecteurs unitaires *dépendent de la position du point M* , et donc *dépendent du temps*.

Méthode 1 : Dérivées de vecteur

Soit $f(t)$ une fonction du temps et $\vec{u}(t)$ un vecteur dépendant du temps :

$$\frac{d(f\vec{u})}{dt} = \frac{df}{dt}\vec{u} + f\frac{d\vec{u}}{dt}$$

Pour calculer la dérivée par rapport au temps des vecteurs mobiles, il faut les exprimer en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Les vecteurs de la base cartésienne (\vec{e}_x, \vec{e}_y) ne dépendent pas du temps, on peut simplement dériver par rapport au temps coordonnée par coordonnée.

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin(\theta) \\ \dot{\theta} \cos(\theta) \end{pmatrix} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad ; \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{\theta} \sin(\theta) \end{pmatrix} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

On en déduit le vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Dérivons à nouveau pour obtenir le vecteur accélération :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{r} \vec{e}_r) &= \frac{d\dot{r}}{dt} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \frac{d}{dt}(r\dot{\theta} \vec{e}_\theta) &= \frac{d(r\dot{\theta})}{dt} \vec{e}_\theta + r\dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \\ &= \dot{r}\dot{\theta} \vec{e}_\theta + r\ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta} \vec{e}_r) \end{aligned}$$

En additionnant et réarrangeant ces deux expressions, on obtient la formule pour l'accélération en coordonnées polaires.

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

Dans un problème à trois dimensions, on introduit les **coordonnées cylindriques**. Le mouvement du point M dans le plan (Oxy) est repéré en coordonnées polaires, et on rajoute son altitude z . Les vecteurs ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) forment alors une base orthonormée directe.

$$(x, y, z) \longrightarrow (r, \theta, z)$$

La position du point M est alors repérée par :

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$$

Les formules de changement de base cartésien/cylindrique sont :

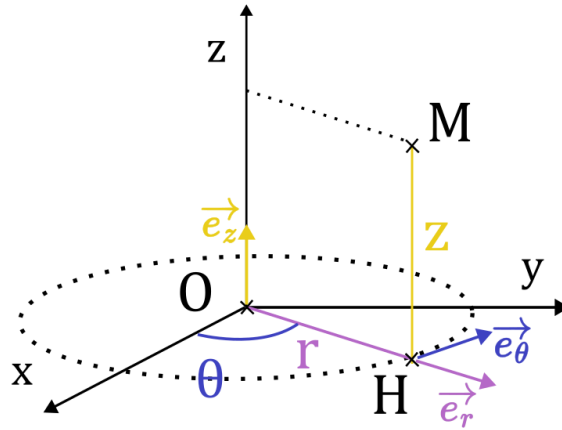


Figure 5 – Système de coordonnées cylindriques

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On exprime alors sans mal la vitesse et de l'accélération à partir des résultats précédents :

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

1.3 Coordonnées sphériques

Le système de coordonnées sphériques utilise une longueur r et deux angles, généralement appelés θ et ϕ .

$$(x, y, z) \longrightarrow (r, \theta, \phi)$$

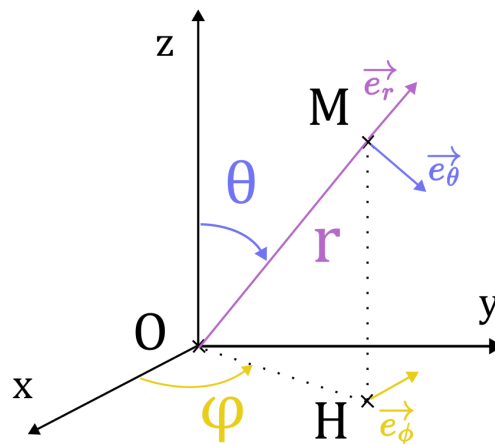


Figure 6 – Système de coordonnées sphériques

— r est la distance euclidienne du point M à l'origine du repère. $r \in [0, +\infty[$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- θ est l'angle que fait le vecteur \overrightarrow{OM} avec l'axe vertical z . On note que $\theta \in [0, \pi]$, et nous discuterons sous peu de ce choix de domaine. θ est appelé **colatitude**.
- On note H le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy) , et ϕ est défini comme l'angle que fait le vecteur \overrightarrow{OH} avec l'axe des x . On a $\phi \in [0, 2\pi[$. ϕ est appelé **longitude**.

Remarque : Si θ variait de 0 à 2π , un point d'une sphère de rayon r pourrait être décrit par deux jeux de coordonnées distincts : (r, θ, ϕ) et $(r, 2\pi - \theta, \phi \pm \pi)$.

Pour garantir l'unicité des coordonnées, on restreint le domaine de θ à $[0, \pi]$!

Un point $M(x, y, z)$ (en coordonnées cartésiennes) est repéré en coordonnées sphériques par :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Comme pour la base cylindrique, les vecteurs de la base sphérique dépendent de la position. Les formules de changement de base cartésien/sphérique sont :

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} ; \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} ; \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exprimons finalement la vitesse dans ce système de coordonnées :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi$$

On donne également l'accélération :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = r\ddot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta$$

1.4 Quelques mouvements particuliers

Définition 6 : Mouvement uniforme

Un mouvement est dit **uniforme** lorsque la norme du vecteur vitesse est constante.

Remarque : attention, cela n'implique pas que l'accélération est nulle car la direction du vecteur vitesse peut varier au cours du temps tant que sa norme reste constante.

Remarque : On peut calculer la dérivée temporelle de la norme de la vitesse :

$$\frac{d||\vec{v}||}{dt} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{||\vec{v}||}$$

Cette identité nous apprend qu'un mouvement uniforme est équivalent à un mouvement où le vecteur vitesse et le vecteur accélération sont orthogonaux.

Définition 7 : Mouvement rectiligne

Un mouvement est dit **rectiligne** lorsqu'il s'effectue le long d'une droite. Au cours d'un mouvement rectiligne, le vecteur vitesse \vec{v} conserve sa direction. Un vecteur directeur de cette droite est le vecteur vitesse de M .

Mouvement rectiligne uniforme La direction et la norme du vecteur vitesse sont constantes, le vecteur vitesse lui-même est alors complètement indépendant du temps. On note : $\vec{v}(t) = \vec{v}(t=0) \equiv \vec{v}_0$. Dans ce cas, les équations horaires du mouvement sont :

$$\begin{cases} x(t) = x(t=0) + v_{0x}t \\ y(t) = y(t=0) + v_{0y}t \\ z(t) = z(t=0) + v_{0z}t \end{cases}$$

Mouvement rectiligne uniformément accéléré On parle de mouvement rectiligne uniformément accéléré lorsque **l'accélération** est constante sur la durée du mouvement. On note : $\vec{a}(t) = \vec{a}(t=0) \equiv \vec{a}_0$

$$\begin{cases} x(t) = x(t=0) + \dot{x}(t=0)t + a_{0x}\frac{t^2}{2} \\ y(t) = y(t=0) + \dot{y}(t=0)t + a_{0y}\frac{t^2}{2} \\ z(t) = z(t=0) + \dot{z}(t=0)t + a_{0z}\frac{t^2}{2} \end{cases}$$

Définition 8 : Mouvement circulaire

Un mouvement est dit **circulaire** lorsqu'il s'effectue le long d'un cercle de centre O . Le vecteur position s'exprime donc, en coordonnées polaire $\vec{OM} = R\vec{e}_r$ avec R le rayon du cercle, fixé.

Au cours d'un mouvement circulaire, le vecteur vitesse \vec{v} est par définition tangent au cercle, il est donc *orthoradial* : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Mouvement circulaire uniforme Le mouvement s'effectue le long d'un cercle, à norme du vecteur vitesse constante. Le repère le plus adapté pour décrire ce mouvement est le repère polaire, car la vitesse peut alors orientée selon la direction orthoradiale, et le rayon $R = ||\vec{OM}||$ est une constante du mouvement. On note : $\dot{\theta} = \omega$ la **vitesse angulaire de rotation**, qui est elle aussi constante. En utilisant les formules démontrées précédemment pour les coordonnées polaires, on a :

$$\begin{cases} \vec{v} = r\omega\vec{e}_\theta \\ \vec{a} = -r\omega^2\vec{e}_r \end{cases}$$

2 Les lois de la dynamique

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour décrire le mouvement d'un système mécanique. Dans cette section, on introduit entre autres la notion de force, c'est-à-dire l'origine du mouvement. On cherche à décrire l'effet de ces forces sur un système physique pour en prédire la trajectoire, à travers les lois de la dynamique.

On notera que, pour rester dans le cadre de la mécanique classique, il faut respecter certaines conditions :

- on néglige les effets relativistes : $v \ll c$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide.
- on néglige les effets quantiques : la taille caractéristique du système doit être grande devant la longueur d'onde de De Broglie (prononcée "De Breuille") : $l \gg \lambda_{dB} = h/(mv)$ où h est la constante de Planck.

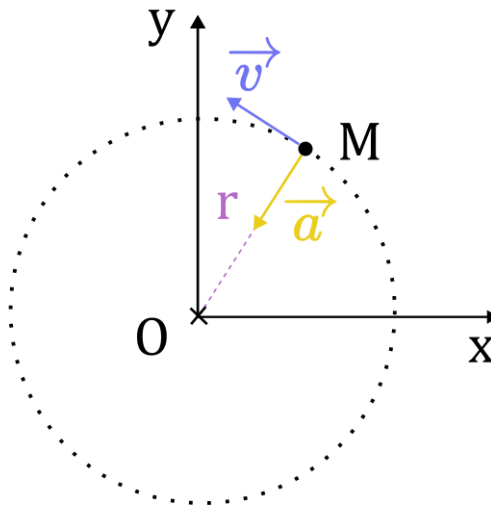


Figure 7 – Direction des vecteurs vitesse et accélération lors d'un mouvement circulaire uniforme de rayon r

Méthode 2 : Sur la définition d'un système d'étude

La première chose à faire avant résolution de tout problème (et c'est valable en général en physique), est de définir le (ou les) système(s) étudié(s).

Si lors des premières applications de la mécanique, le système d'étude apparaît comme évident, il est néanmoins essentiel de prendre l'habitude de le définir formellement en préambule. Une fois ce réflexe acquis, il devient bien plus aisé d'étudier des systèmes complexes. Nous avons précédemment abordé la notion de système physique : en mécanique, le système le plus fondamental est celui du **point matériel**.

2.1 Le point matériel

Définition 9 : Point matériel

On appelle point matériel ou masse ponctuelle un système mécanique qui peut être modélisé par un point géométrique M associé une masse m , et qui peut être décrit complètement par 3 coordonnées de l'espace au plus.

Exemples de points matériels :

- Un palet en mouvement rectiligne uniforme le long d'une axe (Ox) nécessite une seule coordonnée x .
- Le mouvement boule de pétanque lors d'un tir peut être décrit à l'aide de trois coordonnées (x, y, z) .

Exemples de non-points matériels

- Pour décrire un objet comme un javelot, il faut rajouter deux angles pour l'orientation de la pointe : $(m, x, y, z, \alpha, \beta)$.
- Deux masses attachées par un ressort

Dans les faits, un même objet peut être considéré comme un point matériel ou non, selon le niveau de description que l'on cherche à atteindre. Si on s'intéresse à la chute d'une tartine de confiture, trois coordonnées spatiales suffisent pour estimer son temps de chute. Si on souhaite de plus prédire le côté sur lequel la tartine atterrira, il est nécessaire de connaître également son orientation dans l'espace au cours du temps. Les trois coordonnées ne sont donc plus suffisantes et on sort du cadre du point matériel.

2.2 Référentiels

Le concept de référentiel est intuitif, et peut être illustré par une situation simple : A est dans un train qui se déplace par rapport au quai. Pour B qui est aussi dans le train, A est immobile. Pour C qui est sur le quai, A se déplace avec la même vitesse que le train.

Propriété 2 :

La vitesse et l'accélération dépendent du référentiel \mathcal{R} d'observation du mouvement. Une notation rigoureuse pour exprimer le vecteur vitesse ou l'accélération du point M dans le référentiel \mathcal{R} est alors :

$$\vec{v}(M, \mathcal{R}) \quad , \quad \vec{a}(M, \mathcal{R})$$

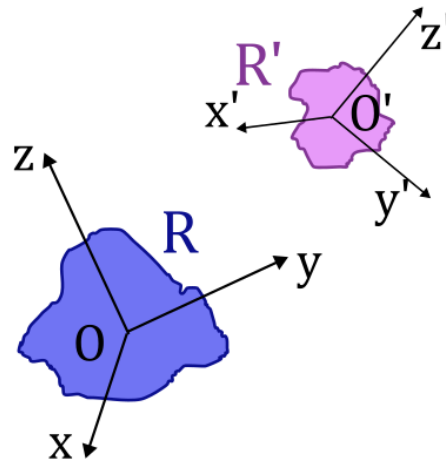


Figure 8 – Schéma de deux référentiels quelconques

Définition 10 : Référentiel

Un référentiel est un **solide indéformable** (un ensemble de points fixes entre eux) par rapport auquel on repère une position ou un mouvement. Il est muni de trois axes et d'une **horloge**, c'est à dire une mesure du temps.

La figure 8 représente deux systèmes d'axes distincts, chacun "ancré" dans un solide. En réalité, il n'y a pas besoin de solide matériel pour définir un référentiel, mais cette définition est commode car il apparaît naturellement que deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre peuvent se déplacer en se translatant et/ou en tournant l'un par rapport à l'autre.

Exemples :

- Référentiel terrestre \mathcal{R}_T : il est centré en un point de la terre et ses trois axes sont liés au globe terrestre.
C'est le référentiel le plus naturel d'utilisation à notre échelle pour décrire par exemple la trajectoire d'une tartine.
Les axes du référentiel terrestre suivent le mouvement de rotation de la Terre, \mathcal{R}_T tourne donc autour du référentiel géocentrique ↓
- Référentiel géocentrique \mathcal{R}_G : c'est un référentiel dont l'origine est le centre de la Terre et dont les 3 axes pointent vers des étoiles lointaines considérées comme fixes.
C'est le référentiel de choix pour étudier le mouvement des satellites de la Terre.
Les axes du référentiel terrestre suivent le mouvement de révolution de la Terre autour du Soleil, \mathcal{R}_G tourne donc autour du référentiel héliocentrique ↓
- Référentiel héliocentrique \mathcal{R}_H , ou de Kepler : c'est un référentiel centré sur le centre du Soleil et dont les trois axes pointent vers des étoiles lointaines. C'est le référentiel de choix pour étudier le mouvement des satellites du Soleil, comme les planètes du système solaire (*Voir le cours "Mécanique céleste et champs"*).

Il est important de noter que pour étudier une situation physique donnée, on définit un système de coordonnées pertinent *après* avoir précisé le référentiel d'étude. Pour un même référentiel, on peut choisir d'utiliser différents systèmes de coordonnées.

Remarque : On peut constater qu'il existe une infinité de référentiels possibles. Parmi tous ces référentiels, on distingue parmi eux une catégorie de référentiels particuliers qu'on appelle les *référentiels galiléens*, dans lesquels les lois de la physique sont plus simples, comme nous le verrons très vite.

2.3 Quantité de mouvement

Définition 11 : La quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point matériel M est définie comme le produit de sa vitesse instantanée et de sa masse :

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

Remarque :

- La quantité de mouvement est une grandeur **additive**, ainsi pour un ensemble de N points matériels :

$$\vec{p}_{total} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

- Tout comme la vitesse, la quantité de mouvement est une grandeur qui dépend du point matériel M considéré et du référentiel \mathcal{R} d'étude : la vitesse d'une mouche dans un train ne sera pas la même si l'observateur est dans le train ou sur le quai.

2.4 1^{ère} loi de Newton : principe d'inertie

Définition 12 : Système isolé, système pseudo-isolé

- Un système mécanique est dit **isolé** lorsqu'il ne subit aucune force extérieure.
- Un système mécanique est dit **pseudo-isolé** si les forces extérieures qu'il subit se compensent.

Exemples :

- Un astronaute dans l'espace et infiniment loin de tout astre peut être considéré comme un système isolé.
- Une tasse sur une table est immobile car son poids est compensé par le support solide. Nous définirons rigoureusement le poids et cette réaction du support par la suite.

Propriété 3 : Principe d'inertie

Il existe des référentiels privilégiés, dits galiléens ou inertiels dans lesquels un point matériel isolé ou pseudo-isolé est soit **immobile**, soit en mouvement **rectiligne uniforme**.

Remarque :

- Sans force, il n'y a pas de modification du mouvement.
- Ce principe suppose l'existence d'un référentiel privilégié (référentiel galiléen), dont il donne la définition.

Propriété 4 :

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est un référentiel galiléen.

Exemple : Si le référentiel terrestre est considéré comme galiléen, alors le référentiel associé à un train qui se déplace sur une ligne droite à vitesse v constante est lui aussi galiléen.

Propriété 5 :

Tout référentiel n'étant pas en translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen n'est pas un référentiel galiléen.

Cela inclue les référentiels en translation accélérée, en rotation, ou même un mélange des deux. Par exemple référentiel terrestre \mathcal{R}_T est en rotation par rapport au référentiel héliocentrique \mathcal{R}_H .

On constate alors que, si le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G est considéré galiléen, alors le référentiel terrestre \mathcal{R}_T qui est en rotation par rapport à \mathcal{R}_G , ne peut pas être galiléen. Disons cependant que l'on étudie un phénomène physique à la surface de la terre, dont la durée est très inférieure à un jour terrestre, et qui a lieu sur une étendue spatiale très inférieure au rayon terrestre. On peut se convaincre que dans ce cadre, le mouvement de \mathcal{R}_T par rapport à \mathcal{R}_G est presque une translation rectiligne uniforme, (voir figure 9) et ainsi \mathcal{R}_T peut être considéré galiléen pour l'expérience considérée.

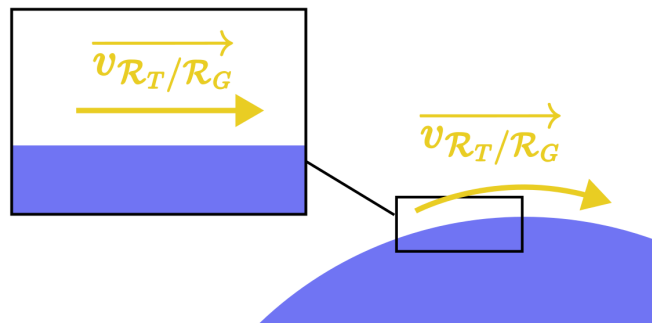


Figure 9 – Déplacement du référentiel terrestre par rapport au référentiel terrestre sur une petite échelle de temps et d'espace

Méthode 3 : Sur la définition d'un référentiel d'étude

La seconde chose à faire avant résolution de tout problème de mécanique est de définir le référentiel dans lequel on étudie le mouvement. On précise également si le référentiel est considéré comme galiléen ou non.

2.5 2^{ème} loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

Propriété 6 : Principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement est égale à la résultante \vec{f} des forces s'exerçant sur ce point :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \vec{f}$$

Remarque :

- Ce principe fondamental relie les forces qui sont des grandeurs *dynamiques* (les causes), et l'accélération, qui est une grandeur *cinématique* (la conséquence).
- Cette équation permet également d'interpréter la masse m comme une quantité qui s'oppose à la modification du mouvement du corps. Plus m est grande, plus la force requise pour modifier l'accélération du corps est importante.
- On notera que $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$ est vérifié uniquement lorsque le système (ici un point matériel M) a une masse m constante. Si la masse de M diminue au cours du temps (par exemple dans le cas d'une fusée qui éjecte de la matière), alors un terme supplémentaire apparaît dans l'équation du mouvement.

2.6 3^{ème} loi de Newton : principe des actions réciproques

Propriété 7 : Principe d'action-réaction

Soit un corps A exerçant une force $\vec{f}_{A \rightarrow B}$ sur un corps B .

- A subit de la part de B une force $\vec{f}_{B \rightarrow A}$, de **même norme**, de **même direction** et de **sens opposé**.

$$\vec{f}_{B \rightarrow A} = -\vec{f}_{A \rightarrow B}$$

- $\vec{f}_{A \rightarrow B}$ et $\vec{f}_{B \rightarrow A}$ sont portées par la droite (AB)

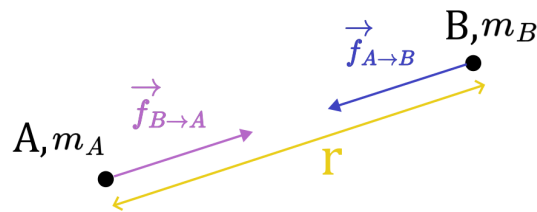


Figure 10 – Principe d'action-réaction

2.7 Quelques forces courantes

Maintenant que les lois sont posées, nous allons creuser dans le détail des forces couramment rencontrées en mécanique. L'inventaire qui suit n'a pas pour vocation d'être exhaustif : certaines forces chères à la mécanique des fluides comme les forces de pression et la poussée d'Archimède sont laissées de côté, tout comme certains exemples qui largement plus détaillés dans le cadre d'un cours sur l'oscillateur harmonique (systèmes masse-ressort).

2.7.1 Interaction gravitationnelle

L'interaction gravitationnelle décrit l'attraction entre deux corps massiques. Il s'agit d'une force qui agit à distance (elle ne nécessite pas de contacts). C'est cette force qui décrit le mouvement des planètes dans le système solaire par exemple.

Soit deux corps A et B , respectivement de masse m_A et m_B , et de position \vec{OA} et \vec{OB} . On note $r = \|\vec{OA} - \vec{OB}\| = \|\vec{AB}\|$ la distance qui les sépare. La force que A exerce sur B est :

$$\vec{f}_{A \rightarrow B} = -G \frac{m_A m_B}{r^3} \vec{AB} = -G \frac{m_A m_B}{r^2} \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$$

2.7.2 Champ de pesanteur et poids

On appelle champ de pesanteur le champ attractif qui s'exerce sur les corps massiques. Ce champ, noté \vec{g} est un champ homogène à une accélération, c'est pourquoi on lui donne aussi le nom d'*accélération de la pesanteur*. Le champ de pesanteur d'une planète comme la Terre provient principalement de la gravité, et il est dirigé vers le centre de la Terre.

On appelle **poids** la force de pesanteur associée à ce champ. Dans le référentiel terrestre,

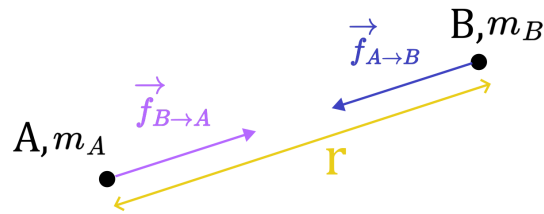


Figure 11 – Force d'interaction gravitationnelle

on la considère souvent comme étant dirigée "vers le bas" : c'est la force qui fait tomber les pommes des pommiers. Soit un objet de masse m , le poids a pour expression :

$$\vec{P} = m \vec{g}$$

On retiendra la valeur numérique approchée de la norme de l'accélération de la pesanteur : $g \simeq 9.81 \text{ m.s}^{-2}$

Objet en chute libre :

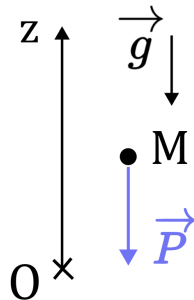


Figure 12 – Chute libre d'un corps de masse m

Un objet est dit en *chute libre* lorsqu'il n'est soumis qu'à son propre poids. Etudions ce mouvement élémentaire dans un premier exemple d'application du principe fondamental de la dynamique :

On étudie un *point matériel* M de masse m , en chute libre dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T , supposé galiléen. On munit l'espace d'un système de coordonnées cartésiennes en notant (Oz) l'axe vertical ascendant. La force de pesanteur est dirigée selon le vecteur $-\vec{e}_z$. D'après le *principe fondamental de la dynamique* (PFD) :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$$

En supposant qu'initialement M était complètement immobile, son mouvement est un *mouvement rectiligne uniformément accéléré* purement vertical. On peut donc se priver des deux premières équations qui concernent le mouvement de M selon les axes (Ox) et (Oy) . On remarque également que les masses se simplifient dans la troisième équation : le mouvement ne dépend pas de la masse de l'objet. En intégrant l'équation selon (Oz) , on obtient :

$$\dot{z}(t) = -gt + C_1$$

Appliquons les conditions initiales pour éliminer la constante d'intégration :

$$0 = v_z(t=0) = \dot{z}(t=0) = -g \times 0 + C_1 = C_1$$

Intégrons à nouveau l'équation pour obtenir l'équation horaire de M :

$$z(t) = -g \frac{t^2}{2} + C_2$$

En supposant qu'initialement M était à l'altitude H :

$$H = z(t=0) = C_2$$

Finalement :

$$z(t) = H - g \frac{t^2}{2}$$

On peut en déduire le temps τ qu'il faut à M pour atteindre le sol en $z = 0$, et la vitesse v_τ qu'aura M au niveau du sol :

$$\tau = \sqrt{2 \frac{H}{g}} \quad v_\tau = \sqrt{2gH}$$

Tir balistique sans frottement :

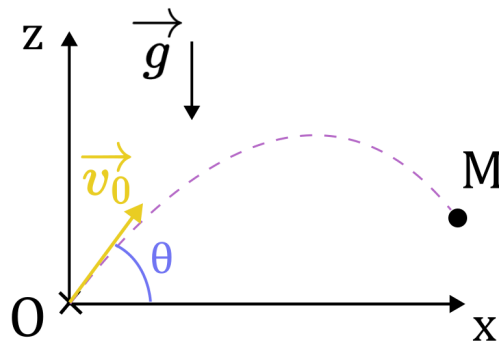


Figure 13 – Tir balistique d'un objet de masse m

Reprenons la situation précédente, mais avec des conditions initiales différentes : M , initialement à l'origine O du repère, est lancé avec un vecteur vitesse \vec{v}_0 de norme v_0 contenu dans le plan (Oxz) , faisant un angle α avec l'axe (Ox) . Le PFD s'écrit comme précédemment :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$$

Ce qui donne après intégration :

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 = v_0 \cos(\alpha) \\ \dot{z} = -gt + C_2 = -gt + v_0 \sin(\alpha) \end{cases}$$

D'où les équations horaires :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \\ z(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin(\alpha)t \end{cases}$$

On détermine alors la trajectoire de M en exprimant par exemple z en fonction de x :

$$\begin{aligned} z(x) &= -\frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2 + v_0 \sin(\alpha) \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \\ &= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha)x \end{aligned}$$

La trajectoire est donc une *parabole*. On peut à présent définir des quantités remarquable du mouvement de M .

- La distance horizontale que parcourt M avant de toucher le sol, appelée la **portée**. On notera ses coordonnées $(x_p, 0)$.
- Le point de plus haute altitude, appelé la **flèche**. On notera ses coordonnées (x_f, z_f) .

Commençons par la portée. Il suffit de résoudre l'équation $z(x) = 0$ pour $x > 0$. On obtient rapidement :

$$x_p = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

L'angle α qui maximise la portée est $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$.

Passons maintenant à la flèche, lorsque M atteint son apogée. Le maximum de la parabole vérifie l'équation suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dz}{dx}(x_f) = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_f + \tan(\alpha) \\ x_f &= \frac{v_0^2}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Finalement,

$$z_f = z(x_f) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_f^2 + \tan(\alpha)x_f = -\frac{v_0^2}{2g} \sin^2(\alpha) + \frac{v_0^2}{g} \sin^2(\alpha) = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2(\alpha)$$

2.7.3 Frottements fluides

Lorsqu'un objet se déplace dans un fluide liquide ou gazeux, il reçoit une force qui s'oppose en général à son déplacement. Celle-ci a pour origine la viscosité du fluide, qui résiste à son écoulement. En fonction de la vitesse à laquelle l'objet se déplace dans le fluide, cette force peut s'exprimer de plusieurs manières : à "faible" vitesse, la norme de la force de frottement sera proportionnelle au vecteur vitesse tandis qu'à "hautes" vitesses, la norme de la force sera quadratique en la vitesse.

Remarques :

- Le changement de régime linéaire -> quadratique est important à avoir en tête lorsqu'on conduit : en effet, au-delà d'une certaine vitesse, les frottements deviennent trop important et la consommation énergétique de la voiture n'est pas optimale.

- Le vecteur vitesse qui intervient est ici le vecteur vitesse relative du point matériel M par rapport au fluide qui s'écoule avec le vecteur vitesse $\vec{v}(\text{fluide}/\mathcal{R})$.

$$\vec{v}(M/\text{fluide}) = \vec{v}(M/\mathcal{R}) - \vec{v}(\text{fluide}/\mathcal{R})$$

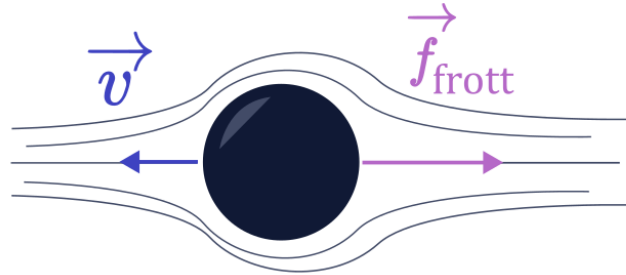


Figure 14 – Force de frottements fluides sur une sphère

Dans cas des frottements linéaires, on peut par exemple exprimer la force de frottements fluides qui s'exerce sur une sphère de rayon R , dans un fluide de viscosité η , dite *force de Stokes* :

$$\vec{f}_{\text{frott}} = -6\pi\eta R \vec{v}(M/\text{fluide})$$

Chute avec frottements fluides linéaires :

Reprenons le cas de la chute libre d'un point matériel M de masse m , qui n'est plus tout à fait libre puisque l'on prend maintenant en considération les frottements de l'air. Lorsque l'air est au repos (pas de vents violents), le PFD donne dans la direction verticale :

$$m\ddot{z} = -mg - \lambda\dot{z} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{v}_z + \frac{\lambda}{m}v_z = -g$$

λ est un coefficient qui contrôle l'intensité de la force de frottement. On obtient alors une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre en la vitesse verticale v_z , avec un second membre constant. Plutôt que de se jeter sur la résolution, prenons le temps d'en extraire des informations intéressantes :

- On remarque que la quantité $\tau = \frac{m}{\lambda}$ est homogène à un temps, c'est le temps caractéristique d'évolution de la vitesse du point M .
- Voici l'évolution que prédit l'équation : supposons qu'initialement M soit au repos. Alors M accélère vers le bas sous l'effet de la pesanteur. Cependant, contrairement à une chute libre, les frottements s'opposent à cette accélération, et cette opposition est d'autant plus forte que la vitesse grandit. Ainsi, au bout d'un temps de l'ordre de quelques τ , la pesanteur et les frottements fluides se compensent, et le point M est quasiment en mouvement rectiligne uniforme ($\dot{v}_z \simeq 0$).
- On en déduit alors la vitesse terminale du mouvement, qui est aussi la vitesse maximale que M peut atteindre :

$$v_{z,\infty} = -g\tau$$

Résolvons tout de même proprement l'équation, qui est linéaire, du premier ordre en v_z , à coefficients constants et avec un second membre constant. On cherche la solution générale sous la forme : $v_z = v_H + v_P$ avec v_H la solution de l'équation homogène (c.à.d sans second membre) et v_P une solution particulière.

- L'équation sans second membre admet les solutions $v_H = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$
- Comme le second membre est constant, on peut raisonnablement chercher une solution particulière constante. Hors, nous en avons déjà trouvé une : v_∞

Finalement $v_z = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + v_\infty$, avec la condition initiale $v_z(t=0) = 0$,

$$v_z(t) = v_\infty(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Nous avons bien $v_z(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} v_\infty$, et on peut de plus interpréter le temps caractéristique τ . En utilisant $1 - e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on obtient :

$$v_z(t \sim 0) \sim v_\infty \frac{t}{\tau} = gt$$

A temps courts devant τ , on retrouve la vitesse de la chute libre. Ainsi, τ est le temps à partir duquel les frottements font leur effet sur le système, qui ne peut alors plus être considéré comme en chute libre.

Chute avec frottements fluides quadratiques :

Dans le cas des frottements fluides quadratiques, la force est de la forme :

$$\vec{f}_{frott} = -\mu ||\vec{v}(M/fluide)|| \vec{v}(M/fluide)$$

Reprenons (encore) un point matériel M initialement immobile lâché dans de l'air au repos. Cette fois-ci :

$$m\ddot{z} = -mg - \mu\dot{z}|\dot{z}|$$

En suivant le même raisonnement que précédemment, on peut déterminer la vitesse aux temps longs sans avoir à résoudre l'équation différentielle :

$$v_{z,\infty} = -\sqrt{\frac{mg}{\mu}}$$

Comment séparer les deux situations ?

Pour estimer la situation dans laquelle on se trouve, il est nécessaire de comparer la vitesse du point M à une vitesse limite qui sépare les deux régimes. Pour cela, on introduit le nombre de Reynolds Re , qui est un nombre sans dimension défini en fonction de la vitesse v du point M par rapport au fluide, la viscosité dynamique η du fluide et sa masse volumique ρ , ainsi que la longueur caractéristique L de l'objet M .

$$Re = \frac{vL\rho}{\eta} = \frac{v}{v_c} \quad v_c = \frac{\eta}{L\rho}$$

Les frottements seront linéaires (respectivement quadratiques) lorsque $Re \ll 1$ (respectivement $Re \gg 1$) ou bien $v \ll v_c$ (respectivement $v \gg v_c$).

2.7.4 Réaction d'un support et lois de Coulomb

On définit naturellement la **réaction normale** d'un support solide qui traduit le fait que la plupart du temps, les objets solides ne se s'interpénètrent pas (un livre ne traverse pas la table sur laquelle il est posé). Dans ce cas particulier, la réaction normale de la table compense exactement le poids du livre. Contrairement à de nombreuses forces précédemment introduites, cette force n'a pas d'expression systématiquement, c'est ce qu'on appelle une force de liaison. C'est l'équilibre des forces dans le principe fondamental de la dynamique qui

permet d'en déterminer une expression explicite.

Prenons un autre exemple, où un palet glisse sans frottement sur un plan lisse, incliné d'un angle α avec l'horizontale. On choisit de prendre l'axe x parallèle au plan de glisse. La réaction normale, notée \vec{R}_N est choisie sur l'axe z : $\vec{R}_N = R_N \vec{e}_z$

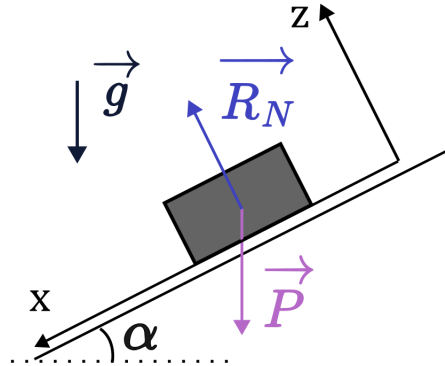


Figure 15 – Glissement sans frottement d'un palet sur un plan incliné

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin(\alpha) \\ 0 = -mg \cos(\alpha) + R_N \end{cases}$$

On en déduit que le mouvement du palet est un mouvement rectiligne uniformément accéléré selon x , et la réaction normale : $R_N = mg \cos(\alpha)$.

Bien sur, si le plan sur lequel est posé le palet présente une surface rugueuse, on observe des **frottements solides**. Ces derniers se traduisent par une force de frottement appelée **réaction tangentielle**. Comme son nom l'indique, elle est toujours tangentielle au support et s'oppose au déplacement du mobile. On choisit de noter ici $\vec{R}_T = -R_T \vec{e}_x$. Expérimentalement, on observe que si le plan est assez incliné, alors le palet continue de glisser en dépit des frottements. On parle alors de **frottement dynamique**, ou de **glissement avec frottement**. La loi de Coulomb sur le glissement avec frottement stipule :

$$||\vec{R}_T|| = f_d ||\vec{R}_N||$$

avec f_d appelé coefficient de frottement dynamique, qui est souvent de l'ordre de l'unité ou du dixième de l'unité.

Reprenons l'exemple du palet :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = m g \sin(\alpha) - R_T \\ 0 = -m g \cos(\alpha) + R_N \\ R_T = f_d R_N \end{cases} \quad \begin{cases} R_N = m g \cos(\alpha) \\ R_T = f_d m g \cos(\alpha) \\ m\ddot{x} = m g (\sin(\alpha) - f_d \cos(\alpha)) \end{cases}$$

On remarque ici que l'hypothèse selon laquelle M continue à glisser n'est valide que si $\sin(\alpha) > f_d \cos(\alpha)$, soit $\alpha > \arctan(f_d)$. Il existe donc un angle critique à partir duquel les frottements solides figent le mobile. Si on diminue progressivement l'inclinaison du plan, la palet finira donc par s'arrêter lorsque $\alpha = \arctan(f_d)$.

Prenons maintenant le protocole inverse : on commence avec $\alpha = 0$, et on augmente progressivement l'inclinaison du plan. Au début le mobile ne bouge pas, puis il commence à glisser pour un angle critique α_c bizarrement supérieur à celui obtenu précédemment... Introduisons le **frottement statique**, ou le **non-glissement sans frottements**. Ici, le palet est

immobile. Il existe également une loi de Coulomb pour cette situation, qui n'est plus une égalité mais une inégalité :

$$||\vec{R}_T|| < f_s ||\vec{R}_N||$$

avec f_s appelé coefficient de frottement statique.

Dès lors que l'inégalité de la loi de Coulomb n'est plus vérifiée, c'est-à-dire lorsque $\alpha > \arctan(f_s)$, le palet se met à glisser et on retombe dans le cas des frottements dynamiques. On a dans la plupart des cas $f_s > f_d$: il est souvent plus difficile d'initier le mouvement que de l'entretenir.

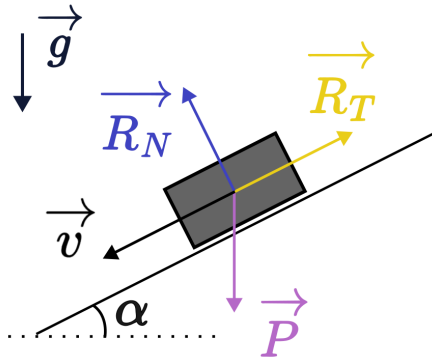


Figure 16 – Frottements dynamiques

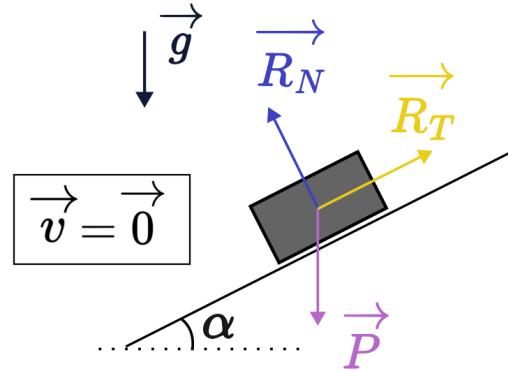


Figure 17 – Frottements statiques

2.7.5 Tension d'un fil

Il s'agit d'une force difficile à définir, mais intuitive à appréhender. Tout comme le livre ne traverse pas la table sur laquelle il est posé, une masse suspendue au bout d'un fil ne tombera pas malgré la gravité qui s'exerce sur elle, car le fil la retient. C'est cette réalité physique que la force de tension permet de traduire. Usuellement notée \vec{T} , c'est aussi une force de liaison, ce qui veut dire que bien qu'il n'existe pas de formule générale, on peut déterminer la tension du fil en équilibrant les forces s'exerçant sur le système. Une chose que l'on peut néanmoins noter, c'est que cette force est toujours orientée dans la direction du fil, si tenté que celui-ci soit effectivement tendu.

Quelqu'un a dit pendule simple ?

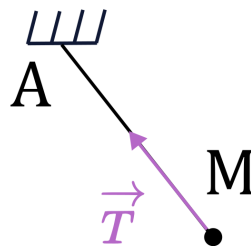


Figure 18 – Illustration de la tension d'un fil

Pendule simple :

Comme son nom le suggère, c'est le système mécanique le plus simple faisant intervenir une force de tension. Cet exemple est d'autant plus intéressant qu'il nous permet de manipuler

pour la première fois les coordonnées polaires.

On étudie un *point matériel* M de masse m , en mouvement dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T , supposé galiléen. On munit l'espace d'un système de coordonnées polaires. M se balance au bout d'un fil sans masse que l'on suppose tendu à tout instant, de longueur l . M est alors en mouvement circulaire de rayon l (ce qui simplifie grandement l'expression de l'accélération car $\dot{r} = 0$).

Les forces qui s'appliquent au point M sont :

- Son poids : $\vec{P} = mg(\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta)$
- La tension du fil : $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ dont l'expression est à déterminer

Appliquons le PFD :

$$\begin{cases} -ml\dot{\theta}^2 = mg\sin(\theta) - T \\ ml\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) \end{cases}$$

Intéressons-nous d'abord à la seconde équation, qui détermine le mouvement du point M . On peut la réécrire sous la jolie forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Cette équation porte le doux nom d'équation du pendule simple. Nous n'allons évidemment pas la résoudre telle quelle, mais plutôt étudier le cas limite des petites oscillations autour de la situation d'équilibre $\theta = 0$. On donne que pour $\theta \ll 1 \text{ rad}$, $\sin(\theta) \simeq \theta$. Dans ce cas, on est ramenés à l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique non-amorti (voir le cours sur l'oscillateur harmonique) :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Le mouvement du pendule est périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

2.7.6 Loi de Hooke

La loi de Hooke décrit le comportement d'un ressort : elle permet d'exprimer la force d'un ressort, ou force élastique $\vec{F}_{\text{él}}$

Où k est la raideur du ressort, et l_0 sa longueur à vide. l est l'élongation du ressort. \vec{u} est un vecteur unitaire qui pointe toujours dans le sens d'étirement du ressort.

$$\vec{F}_{\text{él}} = -k(l - l_0)\vec{u}$$

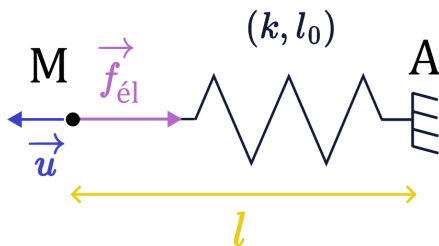


Figure 19 – Force de rappel d'un ressort en extension

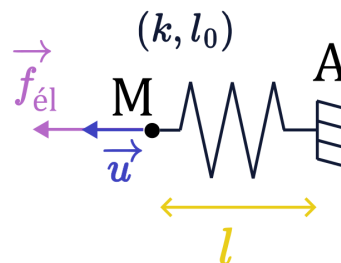


Figure 20 – Force de rappel d'un ressort en compression

La résolution de systèmes masse/ressort sera abordé plus précisément lors du cours sur les oscillateurs harmoniques.

2.7.7 Interaction Coulombienne

L'interaction Coulombienne décrit l'attraction ou la répulsion entre deux corps possédant une charge électrique. Il s'agit d'une force qui agit à distance (elle ne nécessite pas de contacts) et elle est similaire à l'interaction gravitationnelle à de nombreux égards.

Soit deux corps A et B, respectivement de charges q_A et q_B , et de position \vec{OA} et \vec{OB} . On note $r = \|\vec{OA} - \vec{OB}\| = \|\vec{AB}\|$ la distance qui les sépare. La force que A exerce sur B est :

$$\vec{f}_{A \rightarrow B} = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{AB} = \frac{m_A m_B}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$$

Une remarque d'importance est que l'interaction gravitationnelle est toujours négligeable devant l'interaction Coulombienne. Ainsi, lors de l'étude de mouvements de particules chargées comme des électrons, l'interaction gravitationnelle sera complètement laissée de côté.

2.7.8 Force de Lorentz

La force de Lorentz est la force qu'un champ électromagnétique exerce sur un objet chargé (i.e. porteur d'une charge électrique). En notant q la charge de l'objet, \vec{v} sa vitesse, \vec{E} et \vec{B} décrivent respectivement les champs électrique et magnétique. On a :

$$\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

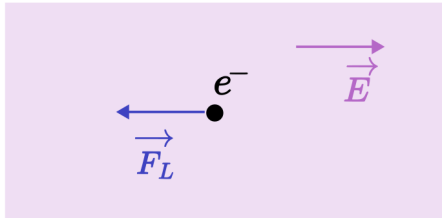


Figure 21 – Force de Lorentz en présence d'un champ électrique

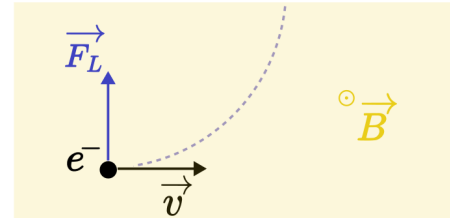


Figure 22 – Force de Lorentz en présence d'un champ magnétique

Le symbole \wedge représente un produit vectoriel entre deux vecteurs :

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Pour manipuler plus facilement le produit vectoriel, on peut retenir ces 3 règles :

- le produit vectoriel est antisymétrique : $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$
- $\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$
- $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$
- $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z$; $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x$; $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y$

Les figures **21** and **22** montrent les trajectoires typiques d'un électron (de charge $-e$) en présence d'un champ électrique seul, et en présence d'un champ magnétique seul. Pour un champ électrique constant et homogène, la force de Lorentz s'écrit simplement $\vec{F}_L = -e\vec{E}$: le mouvement est rectiligne uniformément accéléré. On peut montrer que dans le cas d'un représenté en figure **22**, avec \vec{B} un champ magnétique constant et homogène, le mouvement de l'électron est circulaire uniforme.

Champ électrique seul :

Choisissons $\vec{E} = E\vec{e}_x$. La composante sur l'axe des x de force de Lorentz à laquelle est soumise l'électron est alors $F_x = -eE$. Cette force est constante et uniforme, et complètement analogue au poids dans le référentiel terrestre. Le mouvement de l'électron sur l'axe des x est sans plus de calculs un mouvement uniformément accéléré dans la direction des x décroissants.

Champ magnétique seul :

Choisissons $\vec{B} = B\vec{e}_z$, et calculons le produit vectoriel :

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} \dot{y}B \\ -\dot{x}B \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où les équations couplées du mouvement, où nous identifions $\omega_c = \frac{eB}{m}$ à une pulsation caractéristique appelée 'pulsation cyclotron' :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -eB\dot{y} \\ m\ddot{y} = eB\dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega_c\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} - \omega_c\dot{x} = 0 \end{cases}$$

Remarquons que l'on peut simplement intégrer les deux équation par rapport au temps. Nous introduisons les conditions initiales $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{e}_x$ (vitesse initiale perpendiculaire au champ magnétique), $\vec{OM}(t=0) = \vec{0}$.

$$\begin{cases} \dot{x} + \omega_c y = v_0 \\ \dot{y} - \omega_c x = 0 \end{cases}$$

Dérivons la première équation par rapport au temps, et injectons la deuxième :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_c(\omega_c x) = 0 \\ \dot{y} = \omega_c x \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$$

Finalement, l'équation découplée sur x a pour solutions :

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{i\omega_c t} + Be^{-i\omega_c t} \\ 0 = x(0) = A + B \\ v_0 = \dot{x}(0) = i\omega_c(A - B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t)) \end{cases}$$

Finalement, la trajectoire de l'électron est un **cercle** contenu dans le plan (Oxy) , de centre $(0, R)$ et de rayon $R = \frac{v_0}{\omega_c}$.

Remarquons que si l'on avait choisi une vitesse initiale parallèle au champ magnétique, la force de Lorentz aurait été strictement nulle, et l'électron aurait été en mouvement rectiligne uniforme sur l'axe des z . Ainsi, en prenant un vecteur vitesse initial quelconque, le mouvement complet de M est la combinaison de

- Un mouvement rectiligne uniforme sur l'axe (Oz)
- Un mouvement circulaire uniforme sur le plan (Oxy)

Ce mouvement en 'tire-bouchon' est appelé mouvement **hélicoïdal**.

3 Considérations énergétiques

3.1 Puissance d'une force

Définition 13 : Puissance d'une force

On définit la puissance de la force \vec{f} s'appliquant sur le point M de vitesse instantanée \vec{v} :

$$\mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

Remarque :

- Tout comme la vitesse, la puissance est une grandeur qui dépend du point matériel M considéré et du référentiel \mathcal{R} d'étude, bien que cela soit souvent omis dans la notation.

3.1.1 Caractère moteur ou résistant d'une force

- On dit qu'une force est **motrice** si $\mathcal{P}(\vec{f}) > 0$.
- On dit qu'une force est **résistante** si $\mathcal{P}(\vec{f}) < 0$.
- On dit qu'une force **ne travaille pas** si $\mathcal{P}(\vec{f}) = 0$.

Exemples de puissances de forces :

- Force de frottements linéaire : $\mathcal{P}(\vec{f}_{frott}) = -\lambda v^2$, la force est toujours résistante
- Force réaction normale : $\mathcal{P}(\vec{R}_N) = \vec{N} \cdot \vec{v} = 0$ car la réaction normale est normale à la trajectoire. Ainsi, peu importe la forme de la surface, tant que ladite surface est immobile, la réaction normale ne travaille pas. Il en va de même pour la tension d'un fil tendu.
- Poids : $\mathcal{P}(\vec{P}) = -mgv_z$.
- Composante magnétique de la force de Lorentz : on sait que $\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}$ par propriété du produit vectoriel, donc la puissance est nulle, cette force ne travaille pas. Comme nous l'avons vu, elle ne peut que modifier la trajectoire du point matériel.

3.2 Travail d'une force

3.2.1 Vecteur déplacement élémentaire

On considère un point matériel M en déplacement. On appelle **déplacement élémentaire** le vecteur $\vec{dr}(t)$ qui fait passer M de sa position à l'instant t à sa position à l'instant $t + dt$. Autrement dit, $\vec{dr}(t)$ dirige la droite tangente à la trajectoire de M à l'instant t .

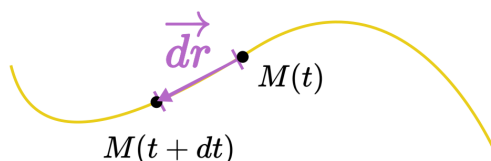


Figure 23 – Vecteur déplacement élémentaire d'un point matériel M

Définition 14 : Déplacement élémentaire

Le vecteur déplacement élémentaire est colinéaire au vecteur vitesse, et on a la relation :

$$\vec{dr}(t) = \vec{v}(t)dt$$

Si le mouvement de M est rectiligne d'axe (Ox) par exemple, on a $\vec{dr} = dx\vec{e}_x$.
Pour un mouvement circulaire de rayon R , on a $\vec{dr} = R d\theta \vec{e}_\theta$.

Définition 15 : Travail élémentaire

Le travail élémentaire d'une force est défini comme suit :

$$\delta W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{dr} = \vec{f} \cdot (\vec{v}(t)dt)$$

En utilisant la relation introduite précédemment pour le déplacement élémentaire :

$$\delta W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{dr} = \vec{f} \cdot (\vec{v}(t)dt) = (\vec{f} \cdot \vec{v}(t))dt = \mathcal{P}(\vec{f}) dt$$

Soit un point matériel se déplaçant de la position A à la position B , selon un chemin quelconque, que l'on note Γ . On définit alors $W_{A \rightarrow B, \Gamma}(\vec{f})$ le travail de la force \vec{f} sur le chemin Γ par la somme des travaux élémentaires sur Γ .

$$W_{A \rightarrow B, \Gamma}(\vec{f}) = \int_{\Gamma, A \rightarrow B} \delta W = \int_{\Gamma, A}^B \vec{f} \cdot \vec{dr} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(\vec{f})(t) dt$$

Remarque :

- Les deux formes intégrales équivalentes ci-dessus peuvent toutes deux être utilisées.
La première est une intégrale sur l'espace, qui ne nécessite pas de connaître les équations horaires du point matériel.
La seconde est une intégrale sur le temps, qui permet de calculer le travail de la force en connaissant la vitesse du mobile au préalable.
- Le travail est homogène à une énergie : il correspond à l'énergie fournie par la force lors de ce déplacement.

Définition 16 : Caractère moteur ou résistant d'une force

Une force est une :

- force motrice si son travail est positif : elle fournit de l'énergie au système.
- force résistante si son travail est négatif : elle prend de l'énergie au système.

Remarque :

- Une force peut être motrice ou résistante selon la portion du mouvement étudié.
- La force de frottement est *toujours* une force résistante.
- La composante magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas : son travail est nul

Propriété 8 : Théorème de l'Energie Cinétique

Version différentielle :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f})$$

Version intégrale :

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{A \rightarrow B, \Gamma}(\vec{f})$$

On peut démontrer les deux version en faisant le produit scalaire du PFD avec la vitesse du point M , puis intégrer pour obtenir la version intégrale :

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} &= \vec{f} \cdot \vec{v} \\ \frac{dE_c}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) = \mathcal{P}(\vec{f}) \\ \int_{A \rightarrow B, \Gamma} \frac{dE_c}{dt} dt &= \int_{A \rightarrow B, \Gamma} \mathcal{P}(\vec{f}) dt = \int_{A \rightarrow B, \Gamma} \delta W(\vec{f}) \\ E_c(B) - E_c(A) &= W_{A \rightarrow B, \Gamma}(\vec{f}) \end{aligned}$$

Distance d'arrêt sur une route rugueuse :

Considérons un véhicule apparenté à un point matériel M de masse m , en déplacement sur une route plane d'axe (Ox) , qui freine à l'instant $t = 0$. Cette route présente une surface rugueuse qui présente des frottements solides avec le véhicule, de coefficient de frottements dynamiques f_d . La question est la suivante : si le véhicule a une vitesse v_0 à l'instant initial, quelle distance L parcourt-il avant de s'arrêter complètement ? On appelle O le point de départ et A le point d'arrêt.

On cherche à appliquer le TEC, pour cela on calcule le travail de la force de frottement. D'après l'équilibre vertical et la loi de Coulomb sur le glissement avec frottements, on a $\vec{R}_T = -mgf_d\vec{e}_x$, d'où :

$$W_{O \rightarrow A, \Gamma} = \int_{\Gamma, O}^A (-mgf_d)\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x dx = -mgf_d \int_0^L dx = -mgf_d L$$

D'après le TEC, on a donc :

$$E_c(A) - E_c(O) = -mgf_d L \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_0^2 = mgf_d L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{v_0^2}{2gf_d}$$

3.3 Conservation de l'énergie

Définition 17 : Forces conservatives

Une force conservative est une force dont le travail ne dépend pas du chemin suivi :

$$W_{A \rightarrow B, \Gamma_1}(\vec{f}) = W_{A \rightarrow B, \Gamma_2}(\vec{f})$$

L'énergie potentielle est alors une fonction qui ne dépend que de la *position*.

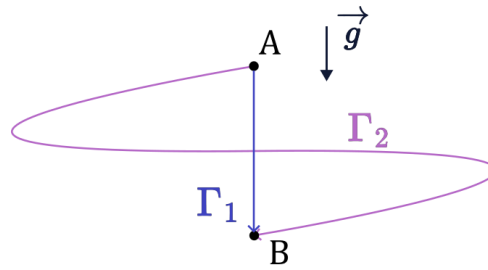


Figure 24 – Deux chemins sous le champ de gravitation terrestre

Exemple : Le poids est une force conservative. Si un skieur descend une piste tout droit (tout schuss!) ou en slalomant, le travail fourni par son poids sera le même dans les deux cas, et correspondra à $mg\Delta h$ avec Δh est le dénivelé.

Définition 18 : Énergie potentielle

On appelle énergie potentielle l'opposé du travail d'une force conservative : cette énergie ne dépend que de la position, et est définie à une constante près.

$$E_p(B) - E_p(A) = -W_{A \rightarrow B}$$

Exemple : On appelle énergie potentielle de pesanteur l'énergie associée au poids : $E_{pp}(z) = mgz$

Propriété 9 : Force dérivant d'un potentiel

Une force conservative \vec{f} est une force qui dérive d'une énergie E_p , alors appelée énergie potentielle :

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} E_p$$

Pour un problème unidimensionnel, ($\vec{f} = f(x)\vec{e}_x$) retenir simplement :

$$\vec{f} = -\frac{dE_p}{dx}$$

Qu'est-ce que c'est que ce symbole $\vec{\nabla}$? : Le delta inversé, plus communément appelé "nabla" désigne, lorsqu'il est coiffé d'une flèche, l'opérateur **gradient**. C'est un opérateur qui prend en argument une fonction scalaire et renvoie un vecteur. Soit une fonction de l'espace $f(x, y, z)$.

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Le gradient d'une fonction f est un vecteur qui indique la direction vers laquelle f augmente le plus. En randonnée, on peut définir l'altitude $h(x, y)$ et $\vec{\nabla} h(x, y)$ indique alors la direction de la plus grande pente ascendante, au point de coordonnées (x, y) .

Qu'est-ce que c'est que ce ∂ bizarre ? : Il s'agit d'une dérivée partielle (on dit "d rond" pour distinguer du "d droit"). Ces dérivées sont introduites dans le cadre des fonctions de plusieurs variables, par exemple f fonction de trois coordonnées spatiales (x, y, z) . Pour calculer la dérivée partielle par rapport à la variable x , on fixe les variables $y = y_0$ et $z = z_0$, et on applique la définition classique d'une dérivée : $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$.

Exemple des forces conservatives :

Le poids est une force conservative :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z = -\frac{dE_{pp}}{dz}\vec{e}_z \quad E_{pp}(z) = mgz + Cste$$

La force de rappel d'un ressort est aussi conservative et admet pour énergie potentielle :

$$E_{el} = \frac{k}{2}(l - l_0)^2 + Cste$$

Démonstration de l'expression du travail d'une force conservative : La relation $\vec{f} = -\vec{\nabla} E_p$ peut se réécrire en terme de quantités infinitésimales $\vec{f} \cdot d\vec{r} = \delta W = -dE_p$. A partir de là, on retrouve l'expression du travail intégral pour M se déplaçant de A à B :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = - \int_{A \rightarrow B} dE_p = -[E_p(B) - E_p(A)]$$

Armé de ces nouveaux outils, on peut alors reprendre notre démonstration du théorème de l'énergie cinétique en séparant les forces en deux catégories, les forces conservatives ($\vec{f}^{(c)}$) et non conservatives ($\vec{f}^{(n.c)}$). On introduit alors l'énergie mécanique, qui est la somme de la partie cinétique et de la partie potentielle de l'énergie.

Définition 19 : Énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p$$

Propriété 10 : Théorème de l'Énergie Mécanique

Version différentielle :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}^{(n.c)})$$

Version intégrale :

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{A \rightarrow B, \Gamma}(\vec{f}^{(n.c)})$$

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} &= \vec{f}^{(c)} \cdot \vec{v} + \vec{f}^{(n.c)} \cdot \vec{v} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) &= \frac{d}{dt} (-E_p(\vec{x})) + \mathcal{P}(\vec{f}^{(n.c)}) \\ \frac{d}{dt} (E_c + E_p) &= \mathcal{P}(\vec{f}^{(n.c)}) \\ \int_{A \rightarrow B, \Gamma} \frac{dE_m}{dt} dt &= \int_{A \rightarrow B, \Gamma} \mathcal{P}(\vec{f}^{(n.c)}) dt = \int_{A \rightarrow B, \Gamma} \delta W(\vec{f}^{(n.c)}) \\ E_m(B) - E_m(A) &= W_{A \rightarrow B, \Gamma}(\vec{f}^{(n.c)}) \end{aligned}$$

Remarque : On comprend maintenant la terminologie des forces 'conservatives' : lorsqu'un système n'est soumis qu'à des forces conservatives, son énergie mécanique est conservée

dans le temps, c'est une constante du mouvement.

Hauteur maximale de lancer :

Considérons une balle apparentée à un point matériel M de masse m , lancée à la verticale vers le haut à l'instant $t = 0$, avec une vitesse initiale v_0 . Elle est alors en chute libre, et atteint son apogée à une distance H du sol, que l'on cherche à déterminer.

Connaissant l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur, appliquons directement le TEM :

$$E_c(0) + E_p(0) = E_c(H) + E_p(H) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = mgH \Rightarrow H = \frac{v_0^2}{2g}$$

où l'on a utilisé le fait qu'à l'apogée, la vitesse du point M doit s'annuler pour changer de signe.

4 De la mécanique du point à la mécanique du solide

Nous avons insisté sur la définition du point matériel, qui est le système mécanique le plus simple, et le seul système que nous avons étudié jusqu'à présent. Bien sûr, la mécanique ne s'arrête pas à l'étude des points matériels mais s'étend à des systèmes plus généraux, souvent plus complexes. À quoi ressemble un système plus complexe qu'un point matériel ? Deux points matériels, par exemple. Ou bien 3, ou 42, ou encore une infinité de points matériels ! À cet égard, le point matériel n'est pas seulement une simplification, c'est la brique élémentaire qui permet d'étudier beaucoup d'autres systèmes par union de points matériels.

Exemples :

- Deux boules reliées par un ressort
- Deux boules reliées par une tige
- Un pendule à deux segments, appelé pendule double
- Deux astres de masses comparables

Ces systèmes sont bien jolis, mais lorsque le nombre de sous-systèmes augmente, ils deviennent très, très, très difficiles à étudier en pratique. On peut cependant rajouter une contrainte qui rend l'étude des unions de points matériels bien plus accessible : on se restreint aux systèmes pour lesquels la distance entre les points matériels reste constante. Cette hypothèse permet de définir la notion de **solide indéformable**.

Définition 20 : Solide indéformable

Assemblée de points matériels $\{M_i\}_{i \in N}$ tel que la distance entre deux points quelconques reste constante au cours du mouvement :

$$\forall i, j \quad \frac{d}{dt} \|\overrightarrow{M_i M_j}\| = 0$$

En effet, moyennant quelques nouvelles lois que nous allons vous introduire, il est tout à fait possible de décrire des mouvements tels que la chute d'un arbre ou la chute d'une tartine beurrée (oui encore elle).

Remarque importante : Rappelons qu'un point matériel est décrit par 3 coordonnées de l'espace, c'est un système à 3 degrés de liberté. En toute généralité, un système de N points matériels en 3 dimensions possède alors $3N$ degrés de liberté. Le solide indéformable, avec sa propriété extraordinaire, présente au maximum 6 degrés de liberté (3 en translation, 3

en rotation). Le mouvement d'un solide indéformable se décompose en un mouvement de translation global et d'un mouvement de rotation, appelé rotation solide. Prenons l'exemple le plus simple : le solide n'a pas de mouvement de translation global, mais un mouvement de rotation à vitesse angulaire ω autour de l'axe (Oz) , fixe. Les points appartenant à l'axe sont *immobiles*, et les autres points tournent d'autant plus vite qu'ils sont loin de l'axe de rotation. La vitesse d'un point M quelconque appartenant au solide est alors :

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Où l'on a défini le vecteur $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$. Vérifions cette formule. Posons que H le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz) , la distance de M à l'axe est alors $r = \|\overrightarrow{HM}\|$. On s'attend à ce que la vitesse du point M soit un mouvement circulaire de rayon r et de vitesse angulaire ω , soit $\vec{v}(M) = r\omega \vec{e}_\theta$.

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega \vec{e}_z \wedge (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) = \omega r \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = \omega r \vec{e}_\theta$$

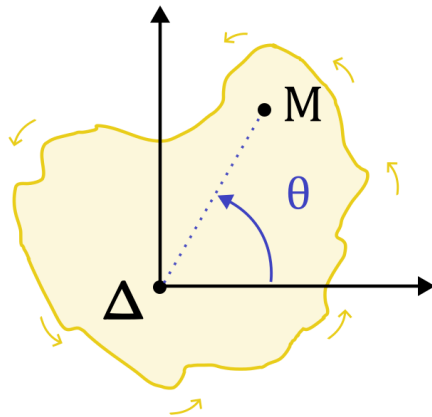


Figure 25 – Solide indéformable en rotation

4.1 Centre de masse et point d'application

Nous nous intéressons tout d'abord au mouvement de translation d'un solide indéformable. Considérons un ensemble quelconque de points matériels :

Définition 21 : Centre d'inertie

Le centre d'inertie (ou centre de masse, ou centre de gravité) G d'un système de N points matériels M_i de masse m_i est défini tel que :

$$\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

ou, défini par rapport à l'origine O d'un référentiel :

$$m \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OM_i} \text{ avec } m = \sum_{i=1}^N m_i$$

Démonstration : En utilisant la relation de Chasles, on a pour $1 \leq i \leq N$: $\overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i}$ pour tout point O de l'espace. En partant de la première expression, et en considérant O l'origine du repère :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= \sum_{i=1}^N m_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i}) \\ \Leftrightarrow -\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{GO} &= \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OM_i} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} \sum_{i=1}^N m_i &= \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OM_i} \\ \Leftrightarrow m \overrightarrow{OG} &= \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OM_i} \end{aligned}$$

Propriété 11 : Théorème du centre d'inertie

Soit un système Σ constitué de N points matériels : La trajectoire du centre d'inertie G de ce système ne dépend que des forces extérieures qui s'exercent sur ce système.

$$m \vec{a}_G = \vec{F}_{ext \rightarrow \Sigma}$$

Démonstration : On considère pour simplifier un système de deux points matériels (M_1, m_1) et (M_2, m_2) et on note G son centre de masse et $m = m_1 + m_2$ (cette démonstration se généralise facilement pour $N > 2$). Si on applique le principe fondamental de la mécanique à ces deux points :

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1 \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2 \end{cases}$$

L'accélération du centre de masse vaut :

$$\vec{a}_G = \frac{1}{m} \frac{d}{dt} (m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}) = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}}{m} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m}$$

On peut décomposer les forces s'exerçant sur les points matériels M_i en une contribution interne au système $\vec{F}_{int \rightarrow i}$ et une contribution externe au système $\vec{F}_{ext \rightarrow i}$.

Puisqu'on considère ici un système de deux points matériels, il est facile d'exprimer les forces internes : $\vec{F}_{int \rightarrow 1} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ et $\vec{F}_{int \rightarrow 2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$.

Or, d'après le principe des actions réciproques (ou 2^{me} loi de Newton), on a : $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$.

On peut ainsi remplacer ceci dans l'expression de l'accélération du centre de masse :

$$\begin{aligned} m \vec{a}_G &= \vec{F}_{ext \rightarrow 1} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{ext \rightarrow 2} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ &= \vec{F}_{ext \rightarrow 1} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{ext \rightarrow 2} - \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ &= \vec{F}_{ext \rightarrow 1} + \vec{F}_{ext \rightarrow 2} = \vec{F}_{ext \rightarrow \Sigma} \end{aligned}$$

Remarque : Cette propriété est valable pour des solides indéformables mais aussi pour des solides déformables. Dans la suite de ce cours, on n'abordera que le cas de solides indéformables. Remarquons qu'à l'aide du Théorème du centre d'inertie, le mouvement de translation d'un solide indéformable est entièrement connu. Cependant, un tel solide peut également tourner sur lui-même, dans un mouvement dit de rotation propre. Pour étudier ce mouvement de rotation, il est de mise d'introduire de nouveaux outils.

4.2 Le moment cinétique

Définition 22 : Moment cinétique

On considère un point matériel (M, m) dans un référentiel \mathcal{R} . Son moment cinétique par rapport à un point A du repère est défini par :

$$\vec{L}_A(M) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}(M) = m \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M)$$

où on rappelle $\vec{p}(M)$ est la quantité de mouvement du point matériel M

Le moment cinétique est aux systèmes en rotation ce que la quantité de mouvement est aux systèmes en translation. Lorsque le système est en rotation autour d'un axe privilégié Δ , on peut définir un moment cinétique scalaire $L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta$ avec \vec{u}_Δ un vecteur directeur de Δ et O un point de la droite.

Définition 23 : Moment d'inertie

Pour un ensemble de N points matériels (M_i, m_i) dans, on définit le moment d'inertie de ce système par rapport à un axe Δ défini par son vecteur unitaire directeur \vec{u} :

$$J_\Delta = \sum m_i r_{\perp,i}^2$$

Où $r_{\perp,i}$ est la distance du point matériel M_i à l'axe Δ . En définissant le projeté orthogonal H_i de M_i sur Δ (voir figure 26, on a $r_{\perp,i} = ||\overrightarrow{H_i M_i}||$

Le moment d'inertie est aux systèmes en rotation ce que la masse est aux systèmes en translation. C'est une grandeur **extensive**, dans la mesure où deux systèmes (1) et (2) tournant autour d'un même axe Δ ont pour moment d'inertie $J_\Delta = J_{\Delta,(1)} + J_{\Delta,(2)}$.

Remarque : Comment calcule-t-on r_\perp ?

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\perp,i} &= \overrightarrow{H_i M_i} = \overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OH_i} \\ r_{\perp,i}^2 &= \overrightarrow{OM_i} \cdot \overrightarrow{H_i M_i} - \overrightarrow{OH_i} \cdot \overrightarrow{H_i M_i} = \overrightarrow{OM_i} \cdot \overrightarrow{H_i M_i} \end{aligned}$$

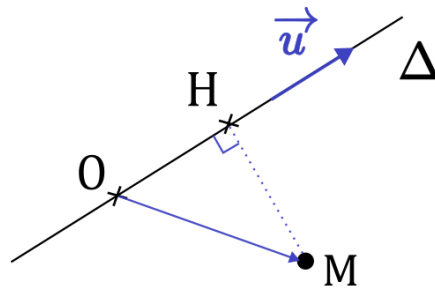


Figure 26 – Distance d'un point M à un axe Δ , projeté orthogonal H

Forme intégrale : Pour calculer le moment d'inertie d'un solide indéformable S constitué d'une continuité de point matériels. On utilise l'extensivité du moment d'inertie : un volume infinitésimal dV à la position \vec{r} contribue $(\rho(\vec{r})dV)r_{\text{perp}}^2$, (avec $\rho(\vec{r})$ la masse volumique, éventuellement dépendante de la position pour un solide non-homogène, ainsi :

$$J_{\Delta} = \int_S \rho(\vec{r}) r^2 dV$$

Exemple : Moment d'inertie d'un cylindre homogène. On se place en coordonnées cylindriques, et on étudie la rotation d'un cylindre de hauteur H et de rayon R autour de son axe de symétrie (Oz). On donne l'expression d'un volume infinitésimal en coordonnées cylindriques : $dV = r d\theta dz dr$.

$$J_{\Delta} = \int_{z=0}^H \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho r^2 r d\theta dr dz = 2\pi H \rho \int_{r=0}^R r^3 dr = 2\pi \rho H \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2$$

Comme le sous entend la définition du moment d'inertie, la longueur d'intérêt n'est pas la hauteur mais le rayon du cylindre.

4.3 Moment d'une force

Comme la plupart des grandeurs définies dans cette partie, le moment d'une force est défini par rapport à un point pivot (ou un axe pivot). Il traduit l'aptitude de cette force à faire tourner l'objet sur lequel elle s'applique autour du pivot. C'est ce concept qui permet d'expliquer pourquoi il est plus difficile d'ouvrir une porte si l'on pousse proche de ses gonds.

Définition 24 : Moment d'une force

Soit \vec{f} une force et P son point d'application. Soit A un point pivot contenant A , Δ un axe pivot (défini par son vecteur directeur \vec{u} : on définit le moment de \vec{f} par rapport à A ou par rapport à Δ :

$$\vec{M}_A(\vec{f}) = \vec{AP} \wedge \vec{f}$$

et

$$M_{\Delta}(\vec{f}) = (\vec{AP} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}$$

Si la force est la cause de la translation des systèmes mécaniques, le moment d'une force est la cause de leur mouvement de rotation. Nous sommes tous au fait de la notion de moment d'une force, parfois sans le savoir, dès lors que l'on a déjà essayé d'ouvrir une porte. Vous pourrez mettre toute la force que vous voulez, si vous poussez la force au niveau des gonds (donc au niveau de l'axe de rotation de la porte) vous resterez certainement coincé. La manière la plus efficace d'ouvrir une porte (à force fixée) est de pousser le plus loin de l'axe de rotation possible, d'où la remarque suivante :

Remarque importante : Pour étudier un solide indéformable, le bilan des forces doit mentionner le point d'application de la force. Malheureusement, déterminer le point d'application d'une force peut être non trivial. On pourra simplement retenir :

- Le poids d'un solide s'applique à son centre d'inertie

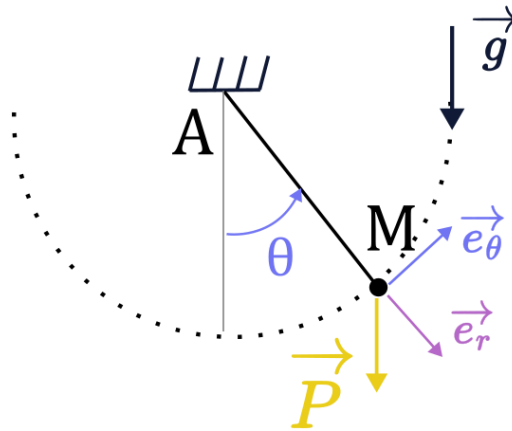


Figure 27 – Pendule simple

Exemple : Nous allons illustrer cette définition par le moment du poids pour un pendule. Le point (ou axe, c'est indifférent puisqu'on se place dans le plan du mouvement) pivot naturel à choisir est le point d'attache du pendule A (voir figure 27). Comme nous considérons un point matériel, il n'y a qu'un seul point d'application possible, c'est le point matériel M lui-même.

On a $\vec{g} = g \cos \theta \vec{e}_r - g \sin \theta \vec{e}_\theta$.

On peut en déduire le moment du poids :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) &= l \vec{e}_r \wedge (m g \cos \theta \vec{e}_r - m g \sin \theta \vec{e}_\theta) \\ &= -ml g \sin \theta \vec{e}_z\end{aligned}$$

4.4 Le théorème du moment cinétique

Avec ces nouveaux outils énoncer un autre théorème important en mécanique (et oui encore un). Il s'agit d'un théorème essentiel pour décrire le mouvement de rotation d'un solide indéformable autour d'un axe. Commençons par énoncer le théorème dans le cas du point matériel :

Propriété 12 : Théorème du moment cinétique : point matériel

Soit un point matériel (M, m) , A un point fixe :

$$\frac{d\vec{L}_A(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{ext})$$

Appliquons le Théorème du Moment Cinétique (ou TMC) au cas du pendule simple : Le moment cinétique du point M par rapport au point A vaut $\vec{L}_A(M) = l \vec{e}_r \wedge ml \dot{\theta} \vec{e}_\theta = ml^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$, d'où :

$$ml^2 \ddot{\theta} + mlg \sin \theta = 0$$

On retrouve à nouveau l'équation différentielle du pendule simple.

Considérons maintenant un solide indéformable, en rotation autour d'un axe fixe. Cette dernière hypothèse simplifie énormément les calculs car le moment cinétique n'a qu'une seule composante d'intérêt : ce n'est plus une quantité vectorielle mais une quantité scalaire.

Propriété 13 : Théorème du moment cinétique : solide indéformable

Soit un solide indéformable S , un axe de rotation fixe Δ , le moment d'inertie de S par rapport à Δ J_Δ . On repère la position du solide par rapport à l'axe de rotation par l'angle θ . On a :

$$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_\Delta \left(\vec{F}_{ext} \right)$$

avec $\omega = \frac{d\theta}{dt}$